CONCOURS SPECIAL T' 1982

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (4 h)

Soit, dans tout ce problème, E un espace vectoriel réel de dimension trois.

On désignera par id_E l'application identique de E, et par $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E.

On rappelle que l'ensemble E est canoniquement muni d'une structure d'espace affine réel attaché à l'espace vectoriel E. (Par exemple, pout tout couple (A, B) de points de cet espace affine E, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est autre que la différence B − A des vecteurs B et A calculée dans l'espace vectoriel E.)

Les termes de mouvement ponctuel dans E, mouvement à accélération centrale par rapport à un point de E, mouvement rectiligne, etc., s'entendront donc dans cet espace affine.

Première partie

Soient, dans toute cette partie :

(i, j, k) une base de E,

v_1 et v_2 les endomorphismes de E dont les matrices dans cette base sont respectivement

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où w, λ, α sont des réels donnés.

I.1. Démontrer que, pour tout vecteur X_0 de E, il existe une unique application dérivable X_1 (resp. X_2) de $\mathbb{R}$ dans E, telle que

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & X_1'(t) = v_1\big(X_1(t)\big) \\ & X_1(0) = X_0 \end{cases} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & X_2'(t) = v_2\big(X_2(t)\big) \\ & X_2(0) = X_0 \end{cases} \right)$$

et la déterminer.

(On donnera la suite des composantes $\big(x_1(t), y_1(t), z_1(t)\big)$ de $X_1(t)$ $\big($resp. $\big(x_2(t), y_2(t), z_2(t)\big)$ de $X_2(t)\big)$ dans la base (i, j, k) de E en fonction de t et de la suite (x_0, y_0, z_0) des composantes de X_0 dans cette base.)

I.2. Pour tout réel t, soit $u_1(t)$ $\big($resp. $u_2(t)\big)$ l'application de E dans E qui, à tout vecteur X_0 de E, fait correspondre le vecteur $X_1(t)$ $\big($resp. $X_2(t)\big)$, où X_1 (resp. X_2) est l'application définie dans la question précédente.

a. Démontrer que, pour tout réel t, $u_1(t)$ $\big($resp. $u_2(t)\big)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E dont on donnera la matrice $N_1(t)$ $\big($resp. $N_2(t)\big)$ dans la base (i, j, k) de E.

Donner, pour tout réel t, l'inverse $\big(N_1(t)\big)^{-1}$ $\big($resp. $\big(N_2(t)\big)^{-1}\big)$ de la matrice $N_1(t)$ $\big($resp. $N_2(t)\big)$.

b. Démontrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $t \longmapsto u_1(t)$ $\big($resp. $t \longmapsto u_2(t)\big)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t

$$u_1'(t) \circ \big(u_1(t)\big)^{-1} = v_1 \qquad (\text{resp. } u_2'(t) \circ \big(u_2(t)\big)^{-1} = v_2)$$

c. Démontrer que, pour tout couple (t, t') de réels

$$u_1(t + t') = u_1(t) \circ u_1(t') \qquad \big(\text{resp. } u_2(t + t') = u_2(t) \circ u_2(t')\big)$$

et que

$$u_1(0) = id_E \qquad (\text{resp. } u_2(0) = id_E)$$

.../...

DEUXIÈME PARTIE

Soient :

u une application indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $u(0) = \mathrm{id}_E$, et que, pour tout réel t, $u(t)$ soit bijective,

X_0 un élément quelconque de E,

Y l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad Y(t) = \big(u(t)\big)(X_0)$.

II.1. Démontrer que Y est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que ses dérivées première et seconde vérifient

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} Y'(t) = (u'(t) \circ \big(u(t)\big)^{-1})\,\big(Y(t)\big) \\ Y''(t) = (u''(t) \circ \big(u(t)\big)^{-1})\,\big(Y(t)\big) \end{cases}$$

II.2. Soit v un endomorphisme quelconque de E.

a. Soit X_0 un élément quelconque de E.

Démontrer qu'il existe une unique application dérivable X de $\mathbb{R}$ dans E telle que

$$\begin{cases} \forall\, t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = v\big(X(t)\big) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

et qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(On ne demande pas de déterminer X en fonction de t, X_0 et v.)

Dans la suite de cette question on désigne par $\mathcal{U}$ l'application de $E \times \mathbb{R}$ dans E qui est définie par

$$\forall\, (X_0, t) \in E \times \mathbb{R} \qquad \mathcal{U}(X_0, t) = X(t)$$

où X est l'unique application dérivable de $\mathbb{R}$ dans E telle que $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = v\big(X(t)\big)$ et $X(0) = X_0$.

b. Démontrer que, pout tout réel t, l'application $E \to E$ définie par $X_0 \longmapsto \mathcal{U}(X_0, t)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel E, et que cet isomorphisme est id_E pour $t = 0$.

(Pour établir la bijectivité de cette application pour un réel $t = t_0$ donné, on pourra, par exemple, observer que les résultats du II.2.*a.* restent valables lorsque la condition $X(0) = X_0$ y est remplacée par $X(t_0) = X_0$.)

c. Démontrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$, qui à tout réel t fait correspondre l'endomorphisme $X_0 \longmapsto \mathcal{U}(X_0, t)$ de E, est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

II.3. Démontrer que, pour tout endomorphisme v de E, il existe une unique application indéfiniment dérivable u de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$ telle que

$$\begin{cases} u(0) = \mathrm{id}_E \\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad u(t) \text{ est bijective} \\ \forall\, t \in \mathbb{R} \quad u'(t) \circ \big(u(t)\big)^{-1} = v \end{cases}$$

et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \forall\, X_0 \in E \quad \big(u(t)\big)(X_0) = \mathcal{U}(X_0, t)$$

où $\mathcal{U}$ est l'application de $E \times \mathbb{R}$ dans E associée à v par le procédé indiqué au II.2.*a.*

Dans toute la suite de ce problème, v *désignera un endomorphisme de E et* u *l'unique application indéfiniment dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathcal{L}(E)$ *qui lui est associée par* II.3. (i.e. telle que $u(0) = \mathrm{id}_E$, $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad u(t)$ est bijective, $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad u'(t) \circ \big(u(t)\big)^{-1} = v$).

Pour tout vecteur X_0 de E, nous appellerons mouvement ponctuel (en abrégé, **mouvement**) **associé** à X_0 l'unique application dérivable X de $\mathbb{R}$ dans E telle que (cf. II.2.*a.*) $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = v\big(X(t)\big)$ et $X(0) = X_0$.

(On observera que, d'après II.3., le mouvement associé à X_0 peut aussi être défini par $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $X(t) = \big(u(t)\big)(X_0)$.)

.../...

Troisième partie

III.1. Démontrer que, pour que, pour tout X_0 appartenant à E, le mouvement X qui lui est associé soit à accélération centrale par rapport à O, où O est le vecteur nul de E, (*i.e.* $\forall t \in \mathbb{R}$ le couple $\big(X''(t), X(t)\big)$ est lié) il faut et il suffit que v satisfasse à la condition suivante

$$\exists\, \mathfrak{C} \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tel que } v^2 = \mathfrak{C}\, \mathrm{id}_E$$

(On pourra commencer par établir qu'il est nécessaire et suffisant que tout vecteur non nul de E soit vecteur propre de v^2.)

III.2.*a*. Démontrer que pour que $v^2 = \mathfrak{C}\, \mathrm{id}_E$, avec $\mathfrak{C} \in \mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}}\, v$ soit une symétrie de E.

b. Dans le cas où $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}}\, v$ ($\mathfrak{C} \in \mathbb{R}_+^*$) est la symétrie de E dont les espaces propres de valeurs propres respectives 1 et -1 sont deux sous-espaces F et G de E de dimensions respectives 2 et 1, déterminer les trajectoires des mouvements X associés aux points X_0 de E.

III.3.*a*. Démontrer que $v^2 = 0$ et $v \neq 0$ implique que v est de rang 1.

b. Dans le cas où $v^2 = 0$ et $v \neq 0$, déterminer les trajectoires des mouvements X associés aux points X_0 de E.

Quatrième partie

IV.1.*a*. Démontrer que, pour que, pour tout X_0 appartenant à E, le mouvement X qui lui est associé soit rectiligne (*i.e.* pour que sa trajectoire appartienne à une droite affine de l'espace affine E), il faut et il suffit que la restriction de v à $\mathrm{Im}(v)$ soit une homothétie.

(On pourra commencer par établir qu'il est nécessaire et suffisant que, pour tout vecteur x de $\mathrm{Im}(v)$, le couple $\big(x, v(x)\big)$ soit lié.)

b. Déterminer v dans le cas où la restriction de v à $\mathrm{Im}(v)$ est l'homothétie nulle.

c. Démontrer que, dans le cas où la restriction de v à $\mathrm{Im}(v)$ est une homothétie non nulle, $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

IV.2. Dans le cas où $\dim\big(\mathrm{Im}(v)\big) = 2$ et où la restriction de v à $\mathrm{Im}(v)$ est l'homothétie de rapport non nul μ, déterminer les trajectoires des mouvements X associés aux points X_0 de E.

Cinquième partie

V.1. Démontrer que, pour tout réel t, le déterminant de $u(t)$ est positif.

V.2.*a*. Étant donnés un nombre réel a, un élément X_0 de E et le mouvement X associé à X_0, soit l'application $f_a : \mathbb{R} \to E$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_a(t) = X(t + a) - \big(u(t)\big)\big(X(a)\big)$$

Démontrer que f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait aux conditions

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \quad f_a'(t) = v\big(f_a(t)\big) \\ f_a(0) = 0 \end{cases}$$

En déduire que f_a est l'application nulle.

b. Démontrer que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 \qquad u(t + t') = u(t) \circ u(t')$.

.../...

Nous nous proposons maintenant d'établir l'équivalence des assertions (1), (2), (3) *et* (4) *suivantes :*

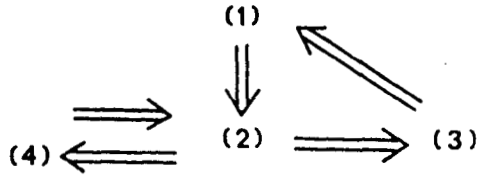
(1) Il existe un produit scalaire $< , >$ sur E tel que, pour tout réel t, $u(t)$ soit une isométrie (qui conserve l'orientation, d'après V.1.) de l'espace vectoriel euclidien $(E, < , >)$.

(2) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est antisymétrique.

(3) u est périodique $\left(i.e.\ \text{il existe un réel strictement positif T tel que } \forall\, t \in \mathbb{R} \quad u(t+T) = u(t)\right)$.

(4) Pour tout X_0 appartenant à E, la trajectoire $X(\mathbb{R})$ du mouvement X associé à X_0 est bornée.

(Cette équivalence sera établie par le diagramme d'implications.)



V.3. Démontrer que (2) implique (1), (3) et (4). Pour cela, supposant que v satisfait à la condition (2) :

a. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Theta & 0 \\ \Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \Theta \in \mathbb{R}$$

b. A l'aide de résultats déjà établis dans la première partie, établir les implications demandées.

V.4. Démontrer que (3) implique (1). Pour cela, supposant que u satisfait à la condition (3), et étant donné un produit scalaire ψ sur E,

a. Démontrer que l'application $< , > : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$\forall\, (x, y) \in E^2 \qquad < x, y > = \displaystyle\int_0^T \psi\left(u(t)(x), u(t)(y)\right) dt$ est un produit scalaire sur E.

b. Démontrer que, pour tout réel t, $u(t)$ est une isométrie de l'espace vectoriel euclidien $(E, < , >)$, et conclure.

V.5. Démontrer que (1) implique (2).

V.6. Démontrer que (4) implique (2). Pour cela, supposant que u satisfait à la condition (4) :

a. Démontrer que v admet au moins une valeur propre réelle.

b. Démontrer que la seule valeur propre réelle de v est 0.

c. Démontrer que si la seule valeur propre, réelle ou complexe, de v est 0, alors $v = 0$.

d. Démontrer enfin qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est antisymétrique, et conclure.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail